به نام خدا

مباحثی مقدماتی برای ریاضیات عموی 1

پدیدآورنده:

الهام روشن بین

گروه ریاضی دانشگاه الزهرا

تابستان 99

فهرست مطالب:

دنباله ها

همانطور که می دانیم، حساب دیفرانسیل و انتگرال علمی است که به بررسی و مطالعه تغییرات کمیت ها (مانند مقادیر توابع، متغیرها و غیره) می پردازد. به طور طبیعی ذهن ما انسانها و حتی حافظه کامپیوترها تنها می تواند مقادیر و کمیت های گسسته و قابل شمارش - یعنی مقادیری که به صورت یک لیست هستند - را پردازش کند. به همین خاطر لازم است که در این بخش با مفهوم دنباله آشنا شویم، که پایه و اساس حساب دیفرانسیل و انتگرال بر آن بنا شده است.

پیش از آنکه دنباله را تعریف کنیم، به یادآوری چند مفهوم که در این بخش به آن نیاز پیدا خواهیم کرد، می پردازیم. یک زیرمجموعه S از اعداد حقیقی را **از پایین کراندار** (**از بالا کراندار**) می نامیم هرگاه عدد حقیقی a (عدد حقیقی b)، که لزوما عضو خود S نیست، موجود باشد به طوری که برای هر $x \in S$، $a \leq x$ ($x \leq b$). در این حالت، a را یک **کران پایین** (**کران بالا**) برای مجموعه S می نامیم. مجموعه S را **کراندار** می نامیم هرگاه هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد. **اصل خوش ترتیبی** برای اعداد صحیح بیان می دارد که، هر زیرمجموعه از پایین کراندار S از اعداد صحیح دارای **کوچکترین** عضو است؛ یعنی عضوی در S وجود دارد که از همه اعضای دیگر آن کوچکتر است.

حال به تعریف دنباله می پردازیم. به زبان غیررسمی، یک دنباله نامتناهی از اعداد حقیقی، لیستی نامتناهی از اعداد حقیقی است که با ترتیب مشخصی پشت سرهم قرار می گیرند. توجه کنید که هر لیست یک عضو ابتدایی دارد. اعضای این لیست را به صورت

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

و یا در حالتی که فرمول مشخصی برای جمله n-ام آن موجود باشد، به صورت

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

نمایش می دهیم. به عنوان مثال، معروفترین دنباله ای که همگی با آن آشنا هستیم دنباله اعداد طبیعی است که به صورت

$$1, 2, 3, \dots$$

یا به صورت

$$1, 2, \dots, n, \dots$$

نمایش داده می شود. همانطور که اشاره کردیم، مفهوم دنباله یکی از مفاهیم اساسی و پرکاربرد در علوم ریاضی و سایر علوم است. به همین خاطر در ادامه آن را به صورت رسمی و علمی تعریف خواهیم کرد.

ابتدا توجه کنید که در یک لیست مرتب، برای رجوع به یک عضو به خصوص، کافیست تا مکان آن عضو را در آن لیست تعیین کرده و به آن ارجاع دهیم؛ یعنی مشخص کنیم که عضو مورد نظر ما مثلا عضو اول، یا عضو دوم، یا عضو سوم، یا ... از لیست مورد نظر است. این ایده کمک می کند تا یک روش ساده برای تعریف علمی دنباله ها ارائه کنیم.

به زبان ریاضی، یک دنباله با جملات

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

را می توان به کمک یک تابع $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ تعریف کرد که در آن اعضای دنباله درواقع همان مقادیر f، یعنی $f(1)$، $f(2)$، $f(3)$، ... هستند. در این تعریف، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f(n) = a_n$؛ یعنی $f(n)$ همان عضو n-ام دنباله است.

حال که با تعریف ریاضی دنباله آشنا شدیم، برای راحتی کار به جای نوشتن $f(n)$ و استفاده از توابع، برای نمایش جمله n-ام یک دنباله از نماد a_n استفاده می کنیم. همچنین یک دنباله را با نماد $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ یا به طور مختصر با $\{a_n\}$ نمایش می دهیم. در این نمادگذاری، a_n **جمله عمومی** دنباله نامیده می شود.

در ادامه مثال های متنوعی از دنباله ها را مشاهده خواهیم کرد. همچنین در یکی از مثال ها خواهیم دید که چرا گاهی به یک تعریف کلی تر از دنباله ها نیاز پیدا می کنیم.

مثال. در اینجا می خواهیم چند جمله ابتدایی دنباله را مشخص کرده و دنباله را به صورت یک لیست نمایش دهیم.

(الف) دنباله $\left\{\sqrt{n^2+5}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ به صورت لیست زیر نمایش داده می شود:

$$\sqrt{6}, 3, \sqrt{14}, \dots, \sqrt{n^2+5}, \dots$$

(ب) دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ متناظر با لیست زیر است:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

(ج) برای عدد حقیقی نامنفی ثابت p، دنباله $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ را با لیست زیر می توان نمایش داد (دنباله مثال (ب) حالت خاصی از این دنباله به ازای $p = 1$ است):

$$1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \dots, \frac{1}{n^p}, \dots$$

(د) دنباله $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ نمایش ریاضی لیست زیر است:

$$-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots$$

(و) حال دنباله $\{a_n\}$ با جمله عمومی $a_n = \sqrt{n^2 - 5}$ را در نظر بگیرید. از ضابطه جمله عمومی این دنباله واضح است که a_n نه برای هر عدد طبیعی n، بلکه برای اعداد طبیعی $n \geq 3$ تعریف شده است (این با تعریف رسمی دنباله کمی تفاوت دارد!). با جایگذاری اعداد طبیعی $n \geq 3$ در فرمول a_n، لیست زیر به دست می آید:

$$\sqrt{3^2 - 5} = 2, \sqrt{4^2 - 5} = \sqrt{11}, \sqrt{5^2 - 5} = 2\sqrt{5}, \dots$$

دو راه برای رفع این اشکال و گنجاندن اعضای این لیست در تعریف دنباله داریم. راه اول این است که از یک تغییر متغیر ساده استفاده کنیم: قرار می دهیم $m = n - 2$. در نتیجه داریم $n = m + 2$ و با جایگذاری در فرمول a_n خواهیم داشت:

$$a_m = \sqrt{(m + 2)^2 - 5},$$

که در اینجا m می تواند هر عدد طبیعی دلخواه باشد. به این ترتیب دنباله $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ با جمله عمومی $a_m = \sqrt{(m + 2)^2 - 5}$ در تعریف دنباله که در بالا گفتیم، صدق می کند و همان اعضای لیست بالا را به کمک فرمولی که ظاهرا کمی تغییر کرده است، به دست می دهد.

راه دوم برای رفع این اشکال، ارائه تعریف کلی تری از دنباله به زبان ریاضی است. در واقع خیلی مواقع در عمل (به عنوان مثال در برنامه نویسی و طراحی الگوریتم ها و حتی مباحث حساب دیفرانسیل و انتگرال مثل مبحث سری ها و نیز خیلی موارد دیگر در ریاضی) به این نیاز داریم که جمله ابتدایی یک دنباله، اندیسی غیر از عدد 1، مثل 0 یا -1 و یا هر عدد صحیح دیگری باشد. پس در واقع تعریف دقیق تر و کلی تر یک دنباله به زبان ریاضی به صورت زیر خواهد بود.

فرض کنید D یک زیرمجموعه نامتناهی از اعداد صحیح باشد که از پایین کراندار است (چون می خواهیم برای اندیس گذاری عضو ابتدایی یک دنباله از کوچکترین عضو D استفاده می کنیم). در این صورت، یک دنباله نامتناهی

از اعداد حقیقی را می توان با تابع $f:\ D \to \mathbb{R}$ تعریف کرد که در آن برای هر $n \in D$، $f(n) = a_n$. در این حالت مانند قبل، برای راحتی کار، دنباله مورد نظر را با نماد $\{a_n\}_{n \in D}$ نمایش می دهیم.

به عنوان مثال، به کمک تعریف بالا می توانیم دنباله مثال (و) را به راحتی با $\{\sqrt{n^2-5}\}_{n\geq 3}$ نمایش دهیم، بدون نیاز به هیچ تغییر متغیری. توجه کنید که در این مثال، $D = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 3\}$.

دنباله های بازگشتی

گاهی اوقات به جای آنکه مانند مثال های قبلی، فرمول صریحی برای جمله عمومی دنباله $\{a_n\}$ ارائه کنیم، یک یا چند جمله ابتدایی این دنباله را اعلام کرده و برای a_n رابطه ای بر حسب جمله های قبلی آن بیان می کنیم. به چنین دنباله هایی یک **دنباله بازگشتی (یا دنباله تکرار)** می گوییم، که بسیار پرکاربرد هستند. به عنوان مثال

(الف) فرض کنیم دنباله $\{a_n\}$ به صورت زیر معرفی شده باشد:

$$a_1 = 1, \forall\, n \geq 2, a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$$

یا به طور معادل،

$$a_1 = 1, \forall\, n \geq 1, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}.$$

این یک نمونه از یک دنباله بازگشتی است. با استفاده از این تعریف می توان همه جملات دنباله را مشخص کرد:

$$a_1 = 1, a_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, a_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}}, \ldots$$

(ب) دنباله اعداد طبیعی را نیز به راحتی می توان به صورت یک دنباله بازگشتی تعریف کرد:

$$a_1 = 1, \forall\, n \geq 2, a_n = 1 + a_{n-1}.$$

(ج) یک مثال معروف از دنباله های بازگشتی، دنباله فیبوناتچی است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$a_1 = 1,\ \ a_2 = 1, \forall\, n \geq 3, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

با این تعریف، جملات این دنباله به صورت زیر به دست می آیند:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, \ldots$$

(د) فرض کنید a_0 یک عدد حقیقی دلخواه و d یک عدد حقیقی نامنفی باشد. در این صورت دنباله $\{a_n\}_{n\geq0}$ با ضابطه $a_n = d + a_{n-1}$، برای هر $n \geq 1$، را یک **دنباله حسابی** می نامیم. به راحتی مشاهده می کنیم که فرمول صریح a_n برای هر $n \geq 0$ به صورت $a_n = a_0 + nd$ است.

به عنوان یک نمونه، دنباله

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$$

یک دنباله حسابی است که در آن $a_0 = 1$ و $d = 2$.

(و) حال فرض کنید که a_0 یک عدد حقیقی دلخواه و q یک عدد حقیقی مثبت باشد. در این صورت دنباله $\{a_n\}_{n\geq0}$ با ضابطه $a_n = qa_{n-1}$، برای هر $n \geq 1$، را یک **دنباله هندسی** می نامیم. به راحتی مشاهده می کنیم که فرمول صریح a_n برای هر $n \geq 0$ به صورت $a_n = q^n a_0$ است. به عدد ثابت q در یک دنباله هندسی **قدر نسبت** آن دنباله می گوییم.

به عنوان یک نمونه، دنباله

$$3, 3.2, 3.2^2, 3.2^3, 3.2^4, \ldots$$

یک دنباله هندسی با جمله شروع 3 و قدرنسبت $q = 2$ است.

سری ها

دسته دیگری از دنباله ها، که به خصوص در تعریف انتگرال معین و سری های توانی به آنها نیاز پیدا خواهیم کرد و بسیار کاربرد دارند، دنباله های مربوط به **سری های عددی یا سری ها** هستند. همانطور که می دانیم، جمع یک عمل دوتایی است که ذهن ما می تواند آن را به هر تعداد دلخواه متناهی انجام دهد و بنابراین مفهوم مجموع تعداد متناهی عدد برای ما قابل درک است. در تعریف مفهوم سری عددی، در واقع ما به دنبال تعمیم مفهوم عمل جمع از تعدادی متناهی عدد به تعداد نامتناهی عدد هستیم. هرچند در اینجا ما فقط به تعریف اولیه و مقدماتی سری های عددی پرداخته و مفهوم حاصلجمع تعداد نامتناهی عدد، که از مفهوم **همگرایی** سری های عددی ناشی می شود را، بعدا در درس ریاضی 1 مشاهده خواهیم کرد.

فرض کنید $\{a_n\}_{n\geq 1}$ (یا $\{a_n\}_{n\geq 0}$) یک دنباله باشد. عبارت نمادین $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

(یا $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$) یا به طور خلاصه، نماد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (یا نماد $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$)

را یک **سری عددی** یا **یک سری** می نامیم. از آنجایی که جمع یک عمل متناهی است، این نماد فعلا برای ما بی معنی است و بعدا در درس ریاضی عمومی 1 با علت این نمادگذاری آشنا خواهیم شد. حال توجه کنید که ما می توانیم با استفاده از جملات دنباله $\{a_n\}$، به راحتی یک دنباله جدید به صورت زیر بسازیم:

$$\forall\, n \geq 1, s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

(یا $\forall\, n \geq 0, s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$)

دنباله $\{s_n\}$ را **دنباله حاصلجمع جزئی سری** عددی که در بالا معرفی کردیم، می نامند. این دنباله بعدا به ما کمک می کند که مفهوم سری ها را بیشتر درک کرده و به مطالعه آنها بپردازیم.

تذکر: خود سری یک دنباله نیست، بلکه یک نماد است (که فعلا برای ما معنایی ندارد) و تنها دنباله حاصلجمع جزئی یک سری برای ما معنی دار و قابل درک است.

حال به ارائه مثال هایی از سری های مهم و معروف می پردازیم.

(الف) فرض کنیم $\{a_n\}_{n\geq 0}$ یک دنباله هندسی با قدر نسبت q باشد. دراین صورت، سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_0 = a_0 + qa_0 + q^2 a_0 + \cdots$$

را یک **سری هندسی** می نامیم.

به عنوان یک نمونه سری $\sum_{n=0}^{\infty} 3.2^n$ یک سری هندسی است.

(ب) فرض کنید p یک عدد حقیقی ثابت مثبت باشد. در این صورت به ازای هر $p \neq 1$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ را **سری فوق همساز** و به ازای $p = 1$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را **سری همساز** می نامند (در حالت کلی این سری ها را p-سری نیز می نامند).

برخی از ویژگی های دنباله ها و سری ها

در این قسمت دو ویژگی مهم از دنباله ها و سری ها که در درس ریاضی عمومی 1 به آن نیاز داریم، را بیان می کنیم.

دنباله $\{a_n\}_{n \in D}$ را **صعودی** می نامیم هرگاه برای هر $n \in D$، $a_{n+1} \geq a_n$. به نحو مشابه، دنباله $\{a_n\}_{n \in D}$ را **نزولی** می نامیم هرگاه برای هر $n \in D$، $a_{n+1} \leq a_n$. دنباله $\{a_n\}_{n \in D}$ را **یکنوا** می نامیم هرگاه صعودی یا نزولی باشد.

سری $\sum_n a_n$ را **صعودی یا نزولی** می نامیم هرگاه دنباله حاصلجمع جزئی آن صعودی یا نزولی باشد. همچنین سری $\sum_n a_n$ را **یکنوا** می نامیم هرگاه صعودی یا نزولی باشد.

دنباله $\{a_n\}_{n \in D}$ را **از پایین کراندار** (**از بالا کراندار**) می نامیم هرگاه عدد حقیقی a (b) موجود باشد به طوری که برای $n \in D$، $a \leq a_n$ ($a_n \leq b$). در اینصورت، a را یک **کران پایین** (**کران بالا**) دنباله $\{a_n\}$ می نامیم. دنباله $\{a_n\}_{n \in D}$ را **کراندار** می نامیم هرگاه هم از پایین و هم از بالا کراندار باشد. به نحو مشابه سری $\sum_n a_n$ را **کراندار** می نامیم هرگاه دنباله حاصلجمع جزئی آن کراندار باشد. به عنوان مثال،

(الف) به راحتی مشاهده می کنیم که برای هر $n \geq 1$، $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ و نیز $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$. بنابراین دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ یک دنباله نزولی و کراندار است.

(ب) از آنجایی که برای هر عدد حقیقی x، $-1 \leq \sin x \leq 1$، به سادگی نتیجه می گیریم که دنباله $\{\sin n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله کراندار است. همچنین به راحتی می توان نتیجه گرفت که این دنباله یکنوا نیست.

(ج) سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ را با جمله اول $\frac{1}{2}$ و قدرنسبت $\frac{1}{2}$ در نظر بگیرید. از آنجایی که هر جمله از دنباله سازنده این سری، یعنی $\frac{1}{2^n}$، مثبت است به آسانی نتیجه می گیریم که دنباله حاصلجمع جزئی این سری صعودی است. همچنین برای هر $n \geq 0$ داریم

$$0 \leq s_n = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i} = \frac{(1-\frac{1}{2^{n+1}})}{(1-\frac{1}{2})} \leq 2$$

بنابراین این سری هندسی یک سری صعودی و کراندار است.

(د) همه جملات سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ مثبت هستند و بنابراین به وضوح این یک سری صعودی است. همچنین با توجه به نامساوی $2^{n-1} \leq n!$ (که اثبات آن با استقرا در بخش بعدی به عنوان یک تمرین داده شده است)، بحث زیر را داریم:

$$0 \leq s_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} \leq 1+2 = 3$$

پس این سری کراندار نیز هست.

تمرین

1. آیا دنباله $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ کراندار و یکنواست؟
2. نشان دهید که دنباله $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ کراندار و یکنواست.
3. نشان دهید که دنباله $\left\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ کراندار است.
4. نشان دهید که دنباله $\{a_n\}$ با جمله عمومی $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ صعودی و کراندار است.
   (راهنمایی: از نامساوی برنولی (برای هر عدد حقیقی $a \geq -1$، داریم $(1+a)^n \geq 1+na$) و بسط دوجمله ای نیوتن ($(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$) و مثال آخر این بخش استفاده کنید.)
5. نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ کراندار است.
   (راهنمایی: از تساوی $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$ استفاده کنید.)

استقرا

یکی از راه های اثبات در ریاضیات، استفاده از استقرای ریاضی است. این روش در مورد گزاره ها و فرمول هایی به کار می رود که شامل یک عدد طبیعی یا در حالت کلی، شامل عدد صحیحی هستند که از پایین کران مشخصی دارد؛ به عبارت دیگر از یک عدد صحیح مشخصی به بعد، آن حکم یا گزاره برای تمام اعداد صحیح برقرار است.

یادآوری می کنیم که طبق اصل خوشترتیبی، هر زیرمجموعه از پایین کراندار از مجموعه اعداد صحیح دارای کوچکترین عضو است. همچنین، با اضافه کردن یک واحد به هر عدد طبیعی یا صحیح، عدد بعدی در این مجموعه ها به دست می آید. این دو نکته به همراه استدلال استقرایی از منطق، پایه و اساس ایده استقرای ریاضی را تشکیل می دهند. استقرای ریاضی شامل سه گام اصلی و مهم است: **پایه استقرا**، **فرض استقرا** و **حکم استقرا**.

برای معرفی استقرای ریاضی و گام های آن با بیان یک مثال ساده شروع می کنیم.

مسئله. ثابت کنید که برای هر $n \geq 1$،

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

اثبات با استقرا: همانطور که مشاهده می کنید، حکم فوق یک گزاره ریاضی در مورد عدد طبیعی $n \geq 1$ است. ما با منطق استقرایی گام های زیر را برای اثبات این گزاره به کار خواهیم برد:

گام اول (پایه استقرا): درستی این گزاره را برای کوچکترین مقدار n، یعنی $n = 1$، بررسی می کنیم. به وضوح،

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

گام دوم (فرض استقرا): فرض می کنیم که این گزاره برای یک عدد طبیعی دلخواه $n \geq 1$ درست باشد؛ یعنی عدد طبیعی $n \geq 1$ وجود داشته باشد که برای آن

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

توجه کنید که در گام قبل (پایه استقرا)، ما وجود چنین عددی را اثبات کردیم. در واقع ما کوچکترین عدد صحیحی که حکم مسئله برای آن برقرار است را پیدا کردیم.

گام سوم (حکم استقرا): می خواهیم نشان دهیم که برای عدد صحیح بلافاصله بعد از n (همان n-ای که در فرض استقرا داریم)، یعنی $n+1$، نیز حکم مسئله برقرار است. یعنی باید نشان دهیم که

$$1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad (2)$$

در این گام که مهمترین مرحله از استقرای ریاضی است، **با روش های خلاقانه باید از فرض استقرا استفاده کرده** و حکم مسئله، یعنی تساوی (2) را برای $n+1$ اثبات کنیم. خوشبختانه در این مثال این کار راحتی است. ما هنوز درستی تساوی (2) را نمی دانیم، اما می دانیم برای اثبات آن باید نشان دهیم که سمت چپ و راست این تساوی باهم برابرند. برای این کار عبارت سمت چپ تساوی را بررسی می کنیم. توجه کنید که n جمله اول عبارت سمت چپ ما را به یاد فرض استقرا می اندازد. **ما اجازه استفاده از فرض استقرا به عنوان گزاره ای درست را داریم.** بنابراین داریم

$$\begin{aligned}\underbrace{1+\cdots+n}+(n+1)&=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\&=\left(\frac{n}{2}+1\right)(n+1)\\&=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

پس ما از حاصلجمع سمت چپ در حکم استقرا شروع کرده و پس از استفاده از فرض استقرا، توانستیم درستی تساوی (2) را برای عدد طبیعی $n+1$ نشان دهیم.

حال از **منطق استقرایی** که برای ما انسان ها قابل درک است، نتیجه می گیریم که حکم مسئله برای هر عدد طبیعی n درست است. زیرا در بحث بالا، **ما ابتدا در گام اول کوچکترین عدد صحیحی که حکم مسئله را برآورده می کند پیدا کردیم، یعنی عدد $n=1$. سپس در گام های دوم و سوم نشان دادیم که اگر این حکم برای یک عدد $n\geq 1$ درست باشد، برای عدد صحیح بعدی آن نیز درست خواهد بود. این خود به خود نتیجه می دهد (منطق استقرایی) که حکم مسئله برای دنباله عددهای**

$$\mathbf{1,1+1=2,2+1=3,3+1=4,\ldots,n,n+1,\ldots}$$

که شامل کل اعداد طبیعی هست، برقرار بوده و بنابراین بحث فوق یک اثبات کامل است.

در ادامه مثال های بیشتری از استقرای ریاضی را مشاهده خواهیم کرد.

مثال. نشان دهید که برای هر عدد طبیعی $n \geq 4$، $2^n \leq n!$.

اثبات. درستی این گزاره را با استقرا روی n ثابت می کنیم.

پایه استقرا: برای $n = 4$، به وضوح داریم که $2^4 = 16 \leq 24 = 4!$.

فرض استقرا: فرض کنید که برای یک عدد طبیعی $n \geq 4$، نامساوی $2^n \leq n!$ برقرار باشد.

حکم استقرا: می خواهیم درستی $2^{n+1} \leq (n+1)!$ را (برای همان n-ای که در فرض استقرا آمده بود) بررسی کنیم. از سمت چپ این نامساوی شروع می کنیم و آن را به فرض استقرا به گونه ای ربط خواهیم داد:

$$2^{n+1} = 2(2^n) \leq 2(n!) \leq (n+1)(n!) = (n+1)!$$

در نامساوی آخر از این استفاده کردیم که $n+1 \geq 2$ (چون در فرض مسئله داشتیم که $n \geq 4$). پس با استقرا (همانگونه که در مثال قبل، استدلال و منطق آن را به طور کامل شرح دادیم) نتیجه می گیریم که برای هر $n \geq 4$، $2^n \leq n!$ و اثبات تمام می شود.

مثال. نشان دهید که دنباله بازگشتی $\{a_n\}$ با ضابطه زیر صعودی و کراندار است.

$$a_1 = 1, \forall\, n \geq 1, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$$

اثبات. ابتدا با استقرا نشان می دهیم که دنباله $\{a_n\}$ صعودی است. یعنی باید نشان دهیم که برای هر $n \geq 1$، $a_n \leq a_{n+1}$.

پایه استقرا: برای $n = 1$، به وضوح داریم که $a_1 = 1 \leq \sqrt{2} = a_2$.

فرض استقرا: فرض کنیم که برای یک عدد $n \geq 1$، $a_n \leq a_{n+1}$.

حکم استقرا: باید نشان دهیم که $a_{n+1} \leq a_{n+2}$، برای همان n-ای که در فرض استقرا آمده است. برای این کار از تعریف بازگشتی این دنباله و از فرض استقرا استفاده می کنیم:

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \leq \sqrt{1 + a_{n+1}} = a_{n+2}$$

توجه کنید که نامساوی $\sqrt{1 + a_n} \leq \sqrt{1 + a_{n+1}}$ نتیجه فرض استقراست. بنابراین با استقرا صعودی بودن این دنباله اثبات می شود.

حال مجددا با استفاده از استقرا نشان می دهیم که این دنباله کراندار است. برای این کار کافیست تا یک کران بالا و یک کران پایین برای این دنباله پیدا کنیم.

ابتدا توجه کنید که $a_1 = 1 \geq 0$ و طبق بحث فوق دنباله $\{a_n\}$ صعودی است. پس نتیجه می گیریم که همه a_nها نامنفی هستند و بنابراین 0 یک کران پایین برای این دنباله است.

یک روش برای حدس زدن و پیدا کردن یک کران بالا برای اعضای این دنباله، نوشتن تعدادی از جمله های اولیه این دنباله است. داریم:

$$a_1 = 1, a_2 = \sqrt{2}, a_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}}, \dots$$

به نظر می رسد که تمام جملات این دنباله از 2 کوچکتر هستند. این حدس را به کمک استقرا اثبات می کنیم.

پایه استقرا: به وضوح $a_1 = 1 \leq 2$.

فرض استقرا: فرض کنیم که برای یک $n \geq 1$، $a_n \leq 2$.

حکم استقرا: باید نشان دهیم که برای همان nای که در فرض استقرا داشتیم، $a_{n+1} \leq 2$. برای این کار از فرض استقرا و از تعریف بازگشتی این دنباله استفاده می کنیم:

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+2} \leq 2$$

به این ترتیب با استقرا نتیجه می گیریم که برای هر $n \geq 1$، $a_n \leq 2$ و اثبات تمام می شود.

تمرین

1. با استفاده از استقرا تساوی های زیر را اثبات کنید.

(الف) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(ب) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.

(ج) $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

2. با استفاده از استقرا نشان دهید که برای هر $n \geq 1$، $2^{n-1} \leq n!$.
3. با استفاده از استقرا نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n، اگر a_1، a_2، ... و a_n اعداد حقیقی هم علامت و بزرگتر یا مساوی -1 باشند، آنگاه

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

انتگرال نامعین

قبلا با مفهوم مشتق توابع آشنا شده ایم و می دانیم که اگر f یک تابع مشتق پذیر روی بازه I باشد، آنگاه مشتق تابع f که با نماد f' نشان داده می شود نیز یک تابع روی I خواهد بود. به عنوان مثال ما با مشتق توابع زیر آشنا هستیم:

$(x^a)' = ax^{a-1}$ (با فرض $a \neq 0$)

$(\sin x)' = \cos x$ (برای هر عدد حقیقی x)

$(\cos x)' = -\sin x$ (برای هر عدد حقیقی x)

$(e^x)' = e^x$ (برای هر عدد حقیقی x)

$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (برای هر عدد حقیقی x در بازه $(-1, 1)$)

$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ (برای هر عدد حقیقی x)

سوالی که به طور طبیعی در اینجا مطرح می شود این است که:

> برای تابع داده شده f روی بازه I، آیا می توانیم تابعی مانند F پیدا کنیم به طوری که برای هر $x \in I$، $F'(x) = f(x)$؟

درواقع با طرح این سوال به دنبال تعریف عکس عمل مشتق گیری هستیم. براین اساس تعریف زیر را خواهیم داشت:

فرض کنیم تابع f برروی بازه I تعریف شده باشد. تابع F را یک **تابع اولیه** برای تابع f روی بازه I می نامیم هرگاه برای هر $x \in I$ داشته باشیم $F'(x) = f(x)$.

به عنوان مثال به راحتی مشاهده می کنیم که $\sin x$ یک تابع اولیه برای تابع $\cos x$ روی $\mathbb{R}$ است، زیرا

$(\sin x)' = \cos x$ (برای هر عدد حقیقی x).

اما برخلاف مشتق یک تابع که تابعی مشخص و منحصر به فرد است، ممکن است توابع اولیه نامحدودی برای یک تابع داده شده وجود داشته باشد.

به عنوان مثال، توابع $\sin x + \frac{1}{2}$، $\sin x + 5$، $\sin x - \frac{7}{4}$ و به طورکلی برای هر عدد حقیقی ثابت c، تابع $\sin x + c$، همگی توابع اولیه برای تابع $\cos x$ روی $\mathbb{R}$ هستند، زیرا

$(\sin x + c)' = \cos x + 0 = \cos x$ (برای هر عدد حقیقی x).

در حالت کلی با توجه به اینکه مشتق هر تابع ثابت برابر با صفر می شود، نتیجه زیر را داریم:

نتیجه. اگر تابع f روی بازه I دارای یک تابع اولیه مثل F باشد، آنگاه برای هر ثابت $c \in \mathbb{R}$ تابع G با ضابطه

$G(x) = F(x) + c, \quad x \in I$ برای هر

نیز یک تابع اولیه برای f روی بازه I خواهد بود.

نتیجه بالا به همراه قضیه زیر در پیدا کردن همه توابع اولیه یک تابع داده شده به ما کمک خواهد کرد.

قضیه. فرض کنیم توابع f و g بر بازه I پیوسته و درون آن مشتق پذیر باشند به طوری که برای هر $x \in I$،

$f'(x) = g'(x)$.

در این صورت عدد ثابت $c \in \mathbb{R}$، وجود دارد که برای هر $x \in I$، $f(x) = g(x) + c$. به عبارت دیگر اختلاف توابع f و g بر بازه I مقداری ثابت است.

بنابراین از نتیجه و قضیه بالا به این نتیجه می رسیم که

قضیه. اگر تابع f روی بازه I دارای یک تابع اولیه مثل F باشد، آنگاه هر تابع $G: I \to \mathbb{R}$، یک تابع اولیه برای f روی بازه I خواهد بود اگر و تنها اگر، برای یک ثابت $c \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $G = F + c$.

پس با داشتن یک تابع اولیه از f می توانیم تمام توابع اولیه f را به دست آوریم و می دانیم که اختلاف هر دو تابع اولیه f در مقداری ثابت است. بنابراین تعریف زیر را خواهیم داشت.

شکل کلی همه توابع اولیه f را با نماد $\int \boldsymbol{f(x)\,dx}$ نمایش می دهیم و آن را **انتگرال نامعین** تابع f می نامیم. به علاوه، اگر F یک تابع اولیه f روی بازه I باشد، آنگاه برای هر $x \in I$ می نویسیم

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

برای نمونه، با توجه به مثالی که در بالا آوردیم، داریم

$$\int \cos x \; dx = \sin x + c.$$

همچنین طبق یادآوری مشتق توابعی که در ابتدای این بخش آوردیم، داریم

$$\int \sin x \ dx = -\ \cos x + c$$

$$\int e^x \ dx = \ e^x + c$$

$$\int x^a \ dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c \quad (a \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \ \tan^{-1} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \ \sin^{-1} x + c \quad (|x| < 1)$$

با توجه به قاعده های مشتق گیری مثل قاعده جمع و ضرب، قواعد زیر را برای انتگرال نامعین خواهیم داشت:

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

$$\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx \quad (\text{ثابت } k)$$

$$\int \big(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\big)\, dx = f(x)g(x) + c$$

به عنوان مثال،

$$\int (e^x + \ \sin x) dx = \int e^x \ dx + \int \sin x \ dx = \ e^x - \ \cos x + c$$

$$\int \frac{3dx}{1+x^2} = \ 3 \int \frac{dx}{1+x^2} = \ 3\tan^{-1} x + c$$

$$\int 7x^3 - 2x + 5 \ dx = \ 7 \int x^3\, dx - \int 2x\, dx + 5 \int dx = 7\frac{x^4}{4} - \ x^2 + 5x + c$$

$$\int (2xe^x + \ x^2 e^x) dx = \ x^2 e^x + c$$

$$\int (3x^2 \cos x - \ x^3 \sin x)\, dx = \ x^3 \cos x + c$$

تمرین.

1. انتگرال های نامعین زیر را حساب کنید.

الف) $\int 3x^5 + 2x^2 - x + 4 \ dx$

ب) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \ dx$

ج) $\int \frac{3}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x} \ dx$

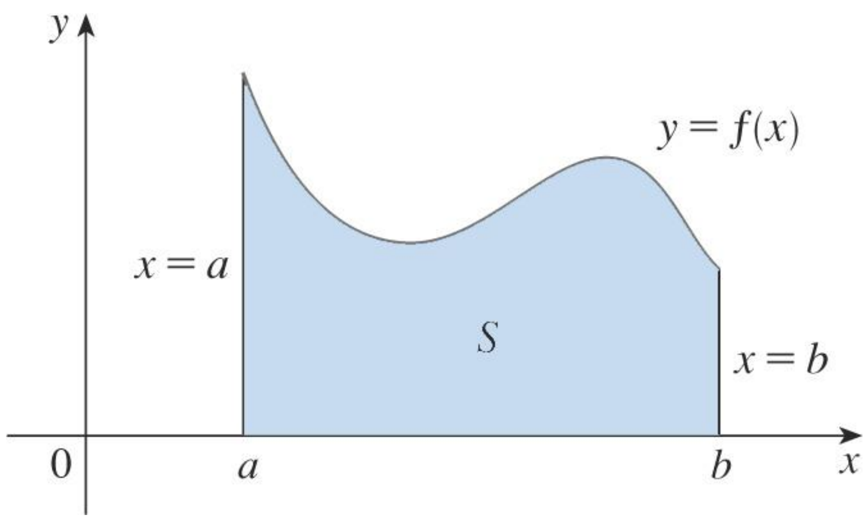
د) $\int \cos^2 x - \sin^2 x \, dx$

و) $\int \frac{1}{x^2} dx$

ی) $\int 3x^\pi \ dx$

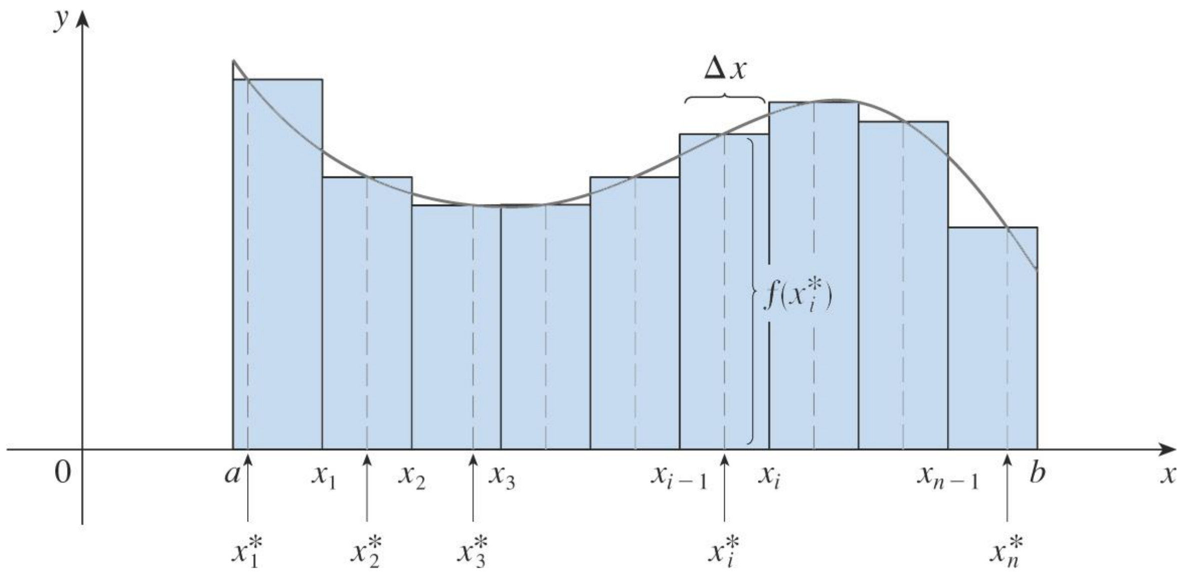
انتگرال معین

در این بخش به معرفی مقدماتی انتگرال معین توابع می پردازیم. مسئله پیدا کردن مساحت اشکال و نواحی مختلف در صفحه مسئله ای بسیار مهم و کاربردی است و از دیرباز مورد توجه ریاضیدانان بوده است. ساده ترین شکل هندسی که می توانیم مساحت آن را محاسبه کنیم، مستطیل است که مساحت آن برابر است با طول ضربدر عرض. به کمک فرمول محاسبه مساحت یک مستطیل، می توانیم مساحت مثلث ها را نیز حساب کنیم. پس از آن به مرور زمان در تاریخ ریاضیات فرمول محاسبه مساحت بسیاری از اشکال هندسی به دست آمده که در آن از ایده تقسیم آن سطوح به مستطیل ها یا مثلث ها استفاده شده است؛ حتی ارشمیدس از این ایده برای محاسبه مساحت دایره و تقریب آن استفاده کرد. ایده تعریف انتگرال معین هم از مسئله محاسبه مساحت شروع می شود.



شکل 1

فرض کنید هدف ما پیدا کردن مساحت زیر نمودار تابعی کراندار، پیوسته و نامنفی است که بالای محور x ها و بازه بسته $[a, b]$ قرار گرفته است؛ مانند ناحیه رنگ شده در شکل 1 که مساحت آن را S می نامیم. می توانیم از ایده ارشمیدس استفاده کنیم و این ناحیه را با تعدادی مستطیل پوشانده و مجموع مساحت مستطیل ها را به عنوان تقریبی از مساحت مورد نظر اعلام کنیم. ساده ترین راه برای این کار آن است که مستطیل ها را به صورت عمودی روی محور x ها و برروی بازه $[a, b]$ قرار دهیم طوری که عرض این مستطیل ها بازه $[a, b]$ را افراز کند (مانند شکل (2)).

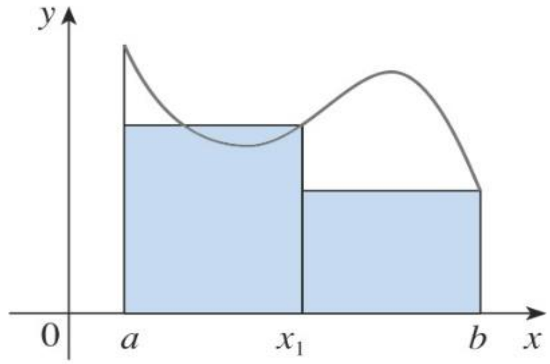


شکل 2

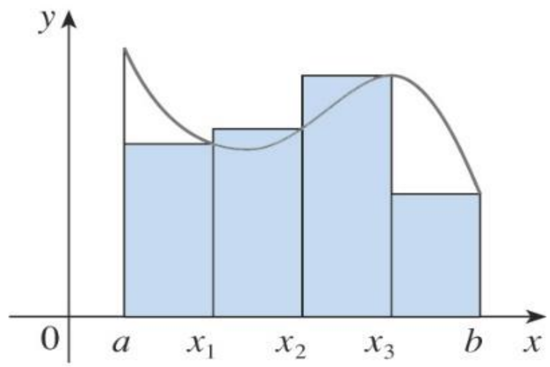
به عنوان یک روش برای انجام این کار، در این شکل ما مستطیل ها را هم عرض انتخاب کرده ایم؛ درواقع ما با انتخاب نقاط x_1، x_2، ... و x_{n-1}، بازه $[a, b]$ را به n تا بازه کوچکتر که طولی برابر با $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ تقسیم کرده ایم. برای تعیین طول چنین مستطیل هایی ما در این شکل، در هریک از بازه های مذکور یک نقطه کاملا دلخواه x_i^* را انتخاب کرده و $f(x_i^*)$ را به عنوان طول مستطیل i-ام در نظر گرفته ایم. به این ترتیب n مستطیل عمودی به دست می آید که مجموع مساحت آنها تقریبی از مساحت زیر نمودار تابع f بر بالای بازه $[a, b]$ است؛ یعنی

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta x \, f(x_i^*)$$

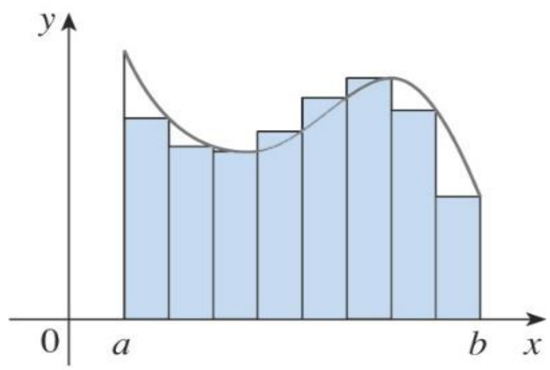
به طور شهودی همانطور که در شکل 3 نشان داده شده، اگر تعداد مستطیل ها یعنی n را افزایش دهیم به تقریب بهتری از مساحت S دست پیدا می کنیم.



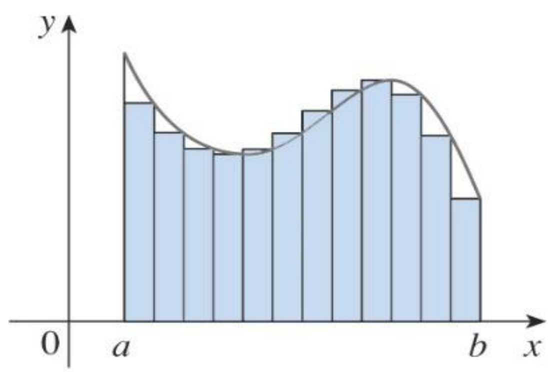
$n = 2$



$n = 4$



$n = 8$



$n = 12$

شکل 3

جالب است بدانید که در ریاضیات پیشرفته ثابت می شود که حتی اگر مستطیل ها هم عرض نباشند بازهم این اتفاق می افتد؛ یعنی اگر ما

1- با انتخاب نقاط دلخواه $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$، بازه $[a, b]$ را به n تا بازه کوچکتر $[a, x_1]$، $[x_1, x_2]$، … و $[x_{n-1}, b]$ تقسیم کنیم و طول بازه i-ام، با نماد Δx_i، را به عنوان عرض مستطیل i-ام در نظر بگیریم.
2- با انتخاب نقطه دلخواه x_i^* در بازه i-ام، برای هر $1 \leq i \leq n$، طول مستطیل i-ام را برابر با $f(x_i^*)$ در نظر بگیریم.

آنگاه با افزایش تعداد بازه ها یعنی n، حاصلجمع مساحت مستطیل های حاصل یعنی

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\, f(x_i^*)$$

به مقدار واقعی S نزدیک و نزدیک تر می شود تا جایی که می توان ثابت کرد

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(x_i^*),$$

به هر طریقی که x_i ها و x_i^* ها انتخاب شوند. به دلیل اهمیت حاصلجمع $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\, f(x_i^*)$، برای آن یک نام مشخص داریم (به نام ریاضیدانی که این مبحث را پایه گذاری کرد): این مجموع یک **حاصلجمع ریمان** تابع f نامیده می شود.

همینطور حد آن را که همان مساحت زیر نمودار تابع f بر بازه $[a, b]$ است، **انتگرال معین** تابع f بر بازه $[a, b]$ می نامیم و با نماد $\int_a^b f(x)\, dx$ نشان می دهیم؛ یعنی داریم

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(x_i^*)$$

توجه کنید که هر آنچه در بالا گفتیم برای یک تابع کراندار، پیوسته و نامنفی بود و به ما در پیدا کردن مقدار یک مساحت کمک می کرد. اما در ریاضیات و فیزیک به این مجموع و حد آن، حتی برای توابعی که لزوما پیوسته و لزوما نامنفی نیستند هم - حتی در جاهایی که تعبیر ملموسی مثل مساحت در کار نباشد - زیاد برخورد می کنیم و به محاسبه آن نیاز پیدا می کنیم. به همین دلیل تعریف زیر را داریم.

فرض کنیم f تابعی کراندار بر بازه $[a,b]$ باشد. اگر با افزایش n و مستقل از نحوه انتخاب x_i ها و x_i^* ها، حاصلجمع $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\, f(x_i^*)$ به مقدار مشخصی میل کند، آنگاه این مقدار مشخص را **انتگرال معین** تابع f بر بازه $[a,b]$ می نامیم. در این حالت، تابع f را بر بازه $[a,b]$ **انتگرالپذیر** می نامیم و می نویسیم

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(x_i^*)$$

در ریاضیات پیشرفته ثابت می شود که هر **تابع پیوسته** بر بازه $[a,b]$ بر این بازه انتگرالپذیر است. به عنوان مثال همه توابع ثابت، توابع چندجمله ای، توابع گویا، توابع مثلثاتی، توابع نمایی و لگاریتم، بر بازه هایی که پیوسته هستند، انتگرالپذیرند.

به راحتی از روی تعریف انتگرال معین توابع می توان نتیجه گرفت که انتگرال معین دارای خواص زیر است:

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad (\text{ثابت } k)$$

اما محاسبه انتگرال توابع از روی حد $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(x_i^*)$ کار پیچیده ای به نظر می رسد. از طرف دیگر ممکن است این سوال برای شما پیش بیاید که مفهوم انتگرال معین هیچ ارتباط ظاهری با مفهوم انتگرال نامعین که در بخش قبلی مشاهده کردیم ندارد، در حالی که برای هر دوی این مفاهیم از کلمه مشترک **انتگرال** استفاده شده است. چگونه حد $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(x_i^*)$ را محاسبه کنیم و چرا نام این حد در صورت وجود انتگرال معین تابع f بر بازه $[a,b]$ است؟

یکی از مهمترین قضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال که در درس ریاضی 1 ارائه می شود، بیان می دارد که اگر f یک تابع پیوسته بر بازه $[a,b]$ و تابع $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ یک تابع اولیه برای f بر این بازه باشد، آنگاه داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

به این ترتیب، این قضیه ارتباط بین انتگرال نامعین و معین را نشان داده و با استفاده از آن به راحتی می توانیم انتگرال معین توابعی که تابع اولیه آنها را می شناسیم، محاسبه کنیم. به عنوان مثال

$$\int_0^{\pi} \cos x\, dx = \sin\pi - \sin 0 = 0$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = (-\cos\frac{\pi}{2}) - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1$$

$$\int_0^{2} e^x dx = e^2 - e^0 = e^2 - 1$$

با توجه به خواص انتگرال معین، انتگرال زیر را به راحتی می توانیم محاسبه کنیم:

$$\int_1^2 (e^x + 3\sin x)dx = \int_1^2 e^x dx + 3\int_1^2 \sin x\, dx = e^x \Big|_1^2 + 3(-\cos x)\Big|_1^2$$

$$= (e^2 - e^1) + 3(\cos 1 - \cos 2)$$

تمرین.

1. انتگرال های نامعین زیر را حساب کنید.

الف) $\displaystyle\int_0^3 3x^5 + 2x^2 - x + 4\ dx$

ب) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$

ج) $\displaystyle\int_2^3 \frac{3}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x}\ dx$

د) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x - \sin^2 x\, dx$